§ 11.3 薄膜干涉 劈尖 牛顿环

一、薄膜干涉

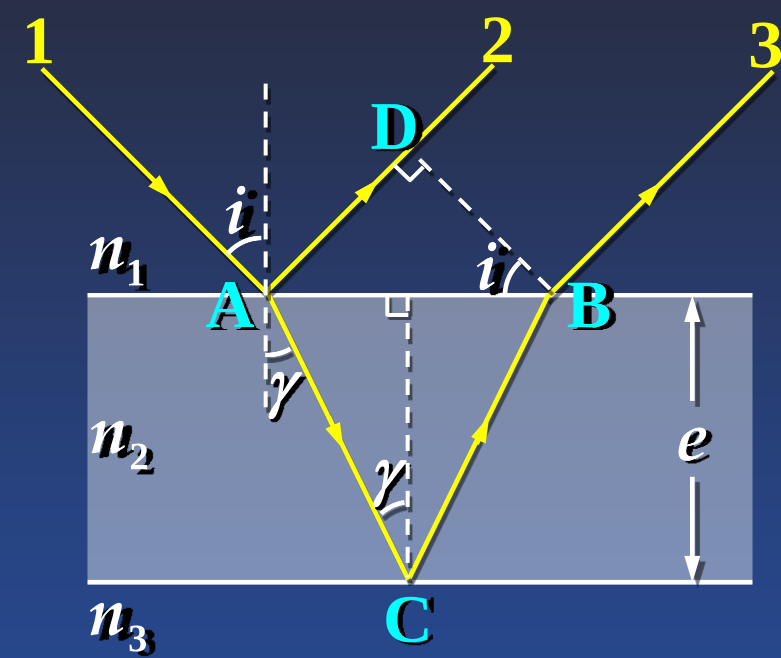
(其他反射光较弱)

设：$n_2 = \max\{ n_1 , n_3 \}$

1、2 间有半波损失;

1、3 间无半波损失;

2、3 间有半波损失!



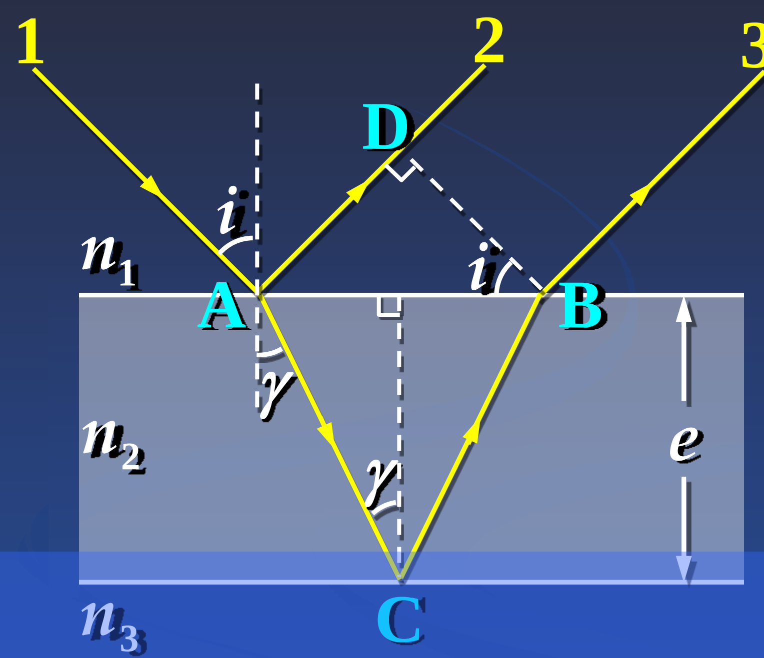
$$\delta = (n_2 \cdot \overline{ACB} - n_1 \cdot \overline{AD}) + \frac{\lambda}{2}$$

$$\overline{ACB} = 2e/\cos\gamma , \quad \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \sin i = 2e \cdot tg\gamma \cdot \sin i$$

折射定律： $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin\gamma$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

若：$n_2 = \text{mid}\{ n_1 ,\ n_3 \}$

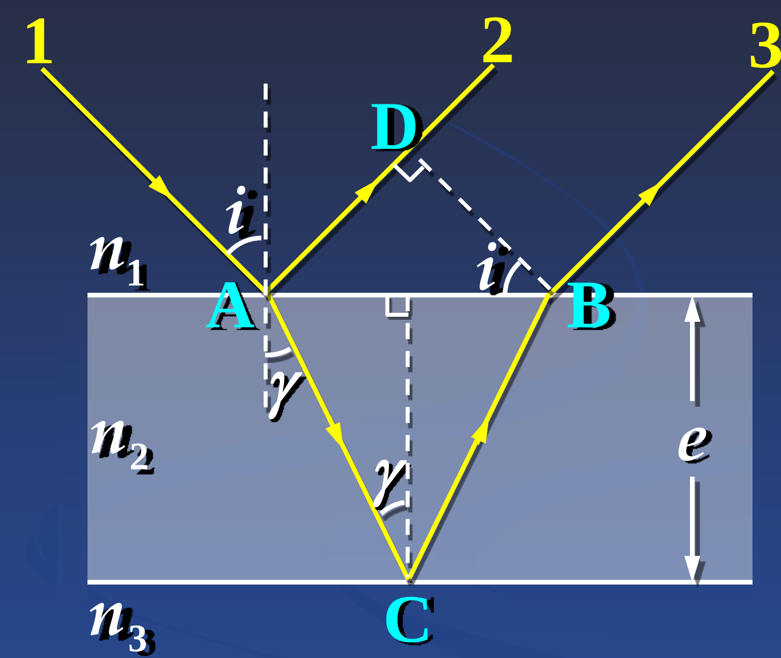


$$\delta = (n_2 \cdot \overline{ACB} - n_1 \cdot \overline{AD}) + \frac{\lambda}{2}$$

$$\overline{ACB} = 2e/\cos\gamma , \quad \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \sin i = 2e \cdot tg\gamma \cdot \sin i$$

折射定律： $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin\gamma$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$



若： $n_2 = \mathrm{mid}\{n_1, n_3\}$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i}$$

$$\delta = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明(相长)} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗(相消)} \end{cases}$$

（注 此处 $\delta \geq 0$，$k \nless 0$）

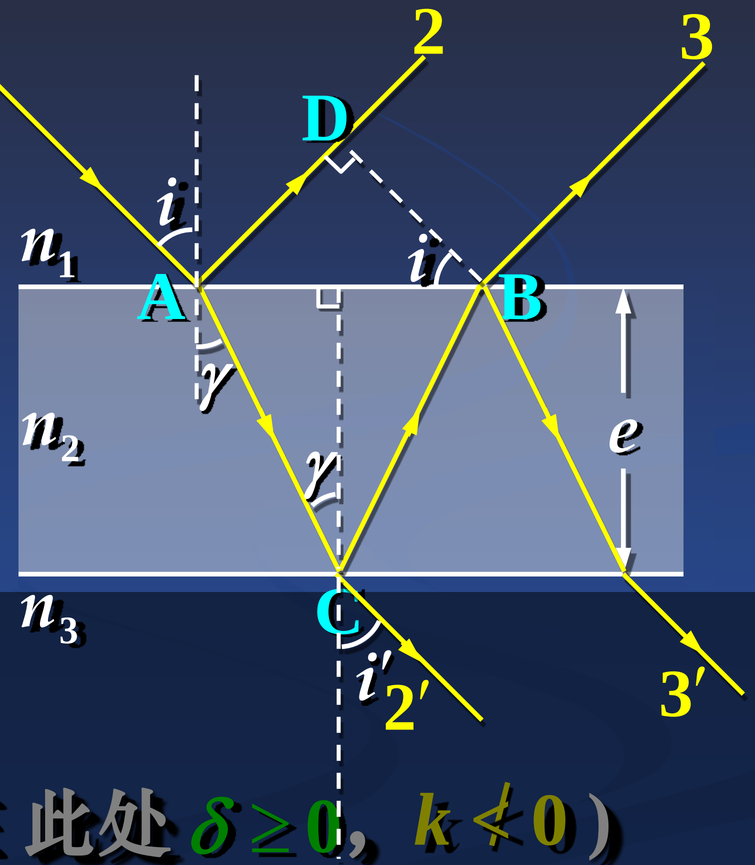
对透射光：

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_3^2 \cdot \sin^2 i'} + (\frac{\lambda}{2})^*$$

$\delta = \delta(e, i, \lambda)$

① e, i 一定：$\delta = \delta(\lambda)$

选择性干涉



$$\delta = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明(相长)} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗(相消)} \end{cases}$$

(注 此处 $\delta \geq 0$，$k \nless 0$)

对透射光： $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_3^2 \cdot \sin^2 i'} + (\frac{\lambda}{2})^*$

$\delta = \delta(e, i, \lambda)$

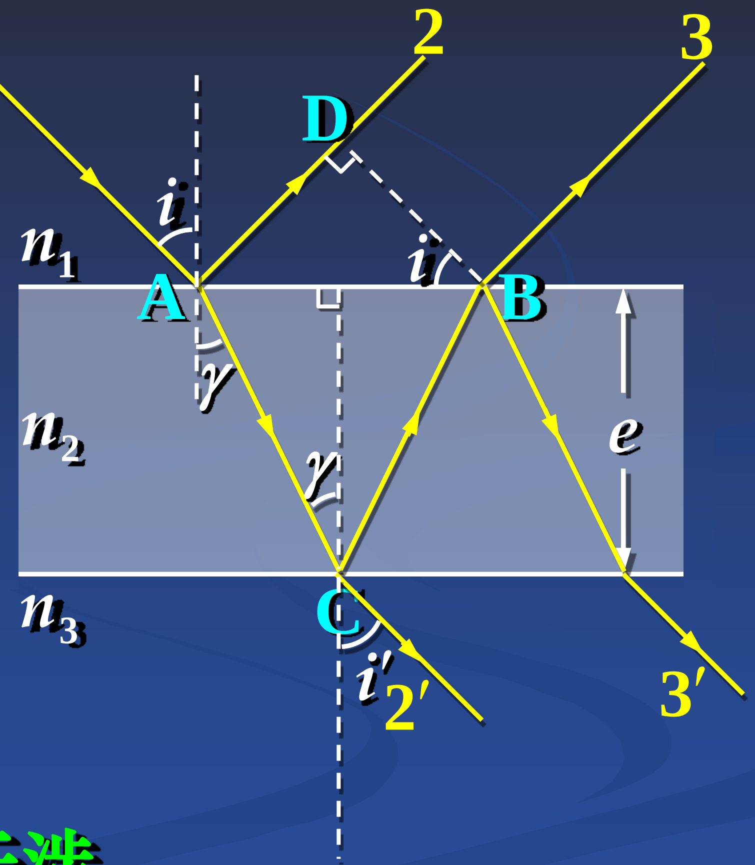
① e, i 一定：$\delta = \delta(\lambda)$

选择性干涉

② i, λ 一定：$\delta = \delta(e)$

等厚干涉 (★★)

③ λ, e 一定：$\delta = \delta(i)$ 等倾干涉



二、选择性干涉：$\delta = \delta(\lambda)$

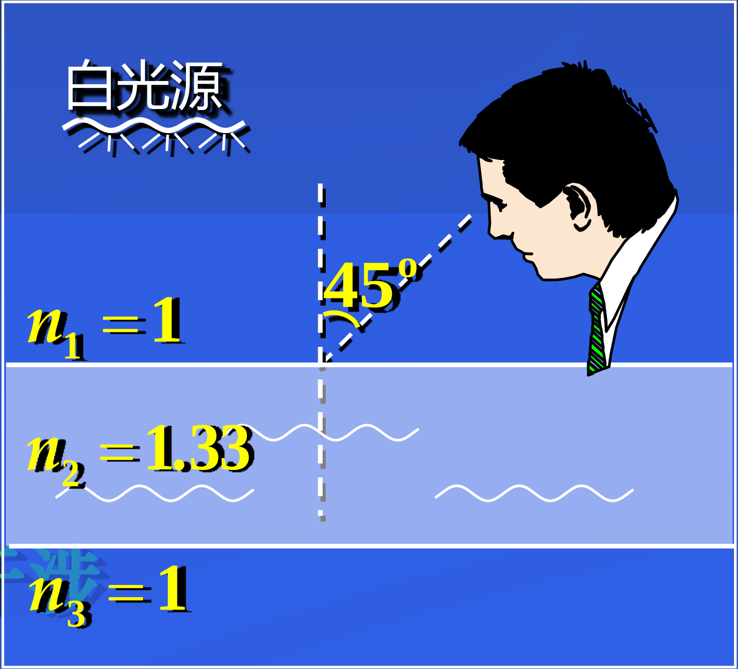
例 如图，沿 $i = 45°$方向观察呈绿色(500nm)，$n = 1.33$ 皂膜厚度至少为多少？若皂膜厚度为该值，在沿法线方向观察又呈何色？

解 $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \dfrac{\lambda}{2}$

② i, λ 一定：$\delta = \delta(e)$

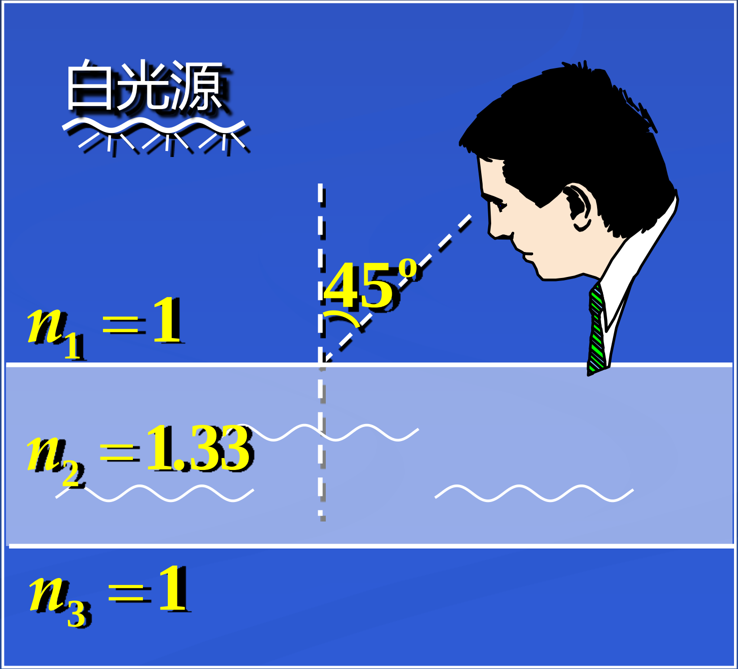
等厚干涉 (★★)

③ λ, e 一定：$\delta = \delta(i)$ 等倾干涉



二、选择性干涉：$\delta = \delta(\lambda)$

例 如图，沿 $i = 45°$方向观察呈绿色(500nm)，$n = 1.33$ 皂膜厚度至少为多少？若皂膜厚度为该值，在沿法线方向观察又呈何色？



解 $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \dfrac{\lambda}{2}$

$i = 45°$时干涉相长：

$$\delta = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$e=\frac{\lambda}{4}\frac{2k-1}{\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 45^{o}}}\approx 0.222(2k-1)\lambda$$

$k=1$ 时：$e_{min}\approx 110.97\,\mathrm{nm}\approx 0.111\,\mu\mathrm{m}$

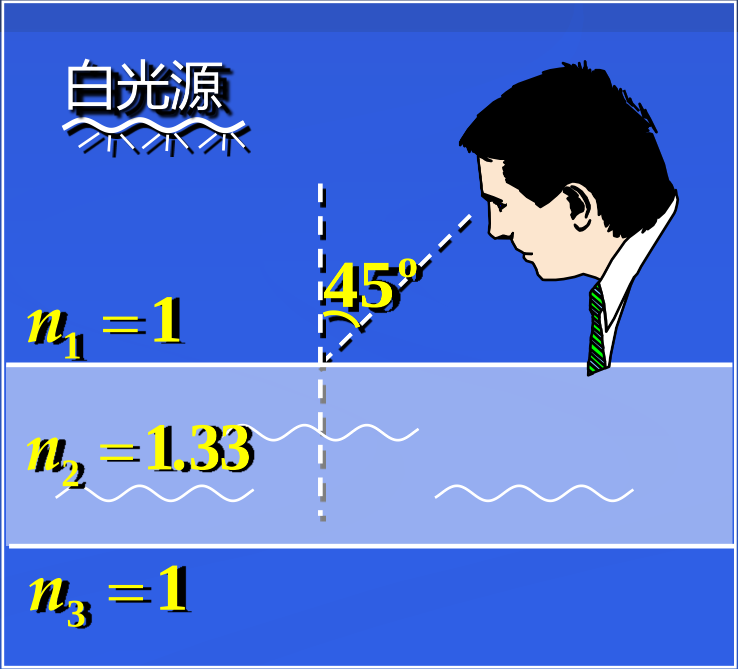
若 $e=e_{min}$，则沿法线方向：

解 $\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\cdot\sin^2 i}\;+\frac{\lambda}{2}$

$i=45^{o}$ 时干涉相长：

$$\delta=2k\frac{\lambda}{2}=k\lambda$$

$$(k=1,2,\cdots)$$



$$e=\frac{\lambda}{4}\frac{2k-1}{\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 45^{o}}}\approx 0.222(2k-1)\lambda$$

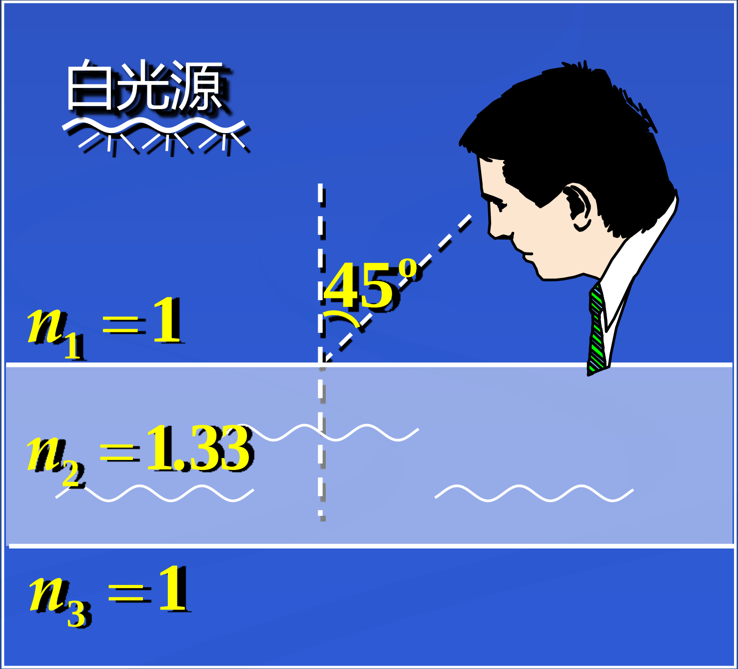
$k=1$ 时：$e_{min}\approx 110.97\,\text{nm}\approx 0.111\,\mu\text{m}$

若 $e=e_{min}$，则沿法线方向：

$$\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\cdot\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2}$$

$$=2n_2e_{min}+\frac{\lambda}{2}=2k\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda=\frac{2ne_{min}}{k-0.5}\approx\frac{590.3\text{nm}}{2k-1}$$



$k=1$ 时： $\lambda = 590.3\,\text{nm}$ 为可见光 **黄色**

$k=2$ 时： $\lambda = 169.8\,\text{nm} < 400\,\text{nm}$ 紫外区，不可见！

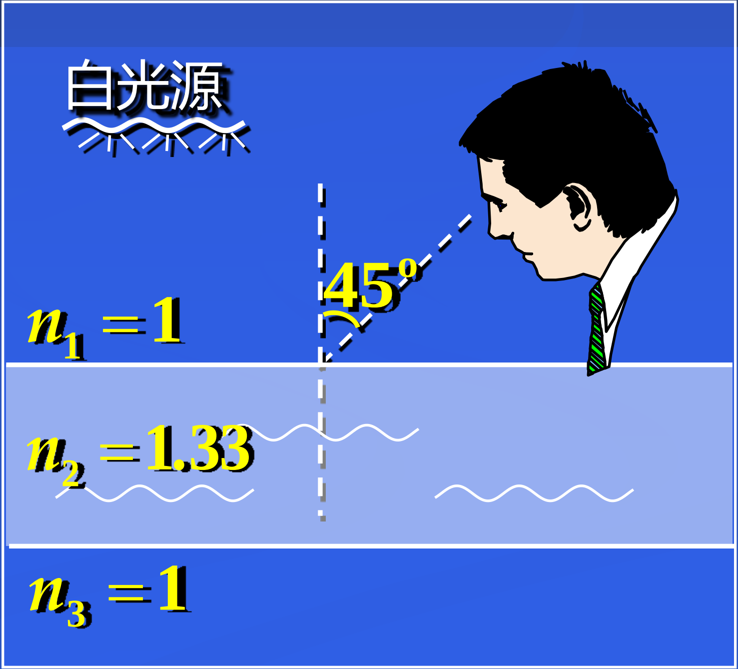
…… …… …… ……

即 沿法线呈**黄色**！

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

$$= 2n_2 e_{min} + \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2ne_{min}}{k-0.5} \approx \frac{590.3\text{nm}}{2k-1}$$



$k = 1$ 时： $\lambda = 590.3\ \text{nm}$ 为可见光 黄色

$k = 2$ 时： $\lambda = 169.8\ \text{nm} < 400\ \text{nm}$ 紫外区，不可见！

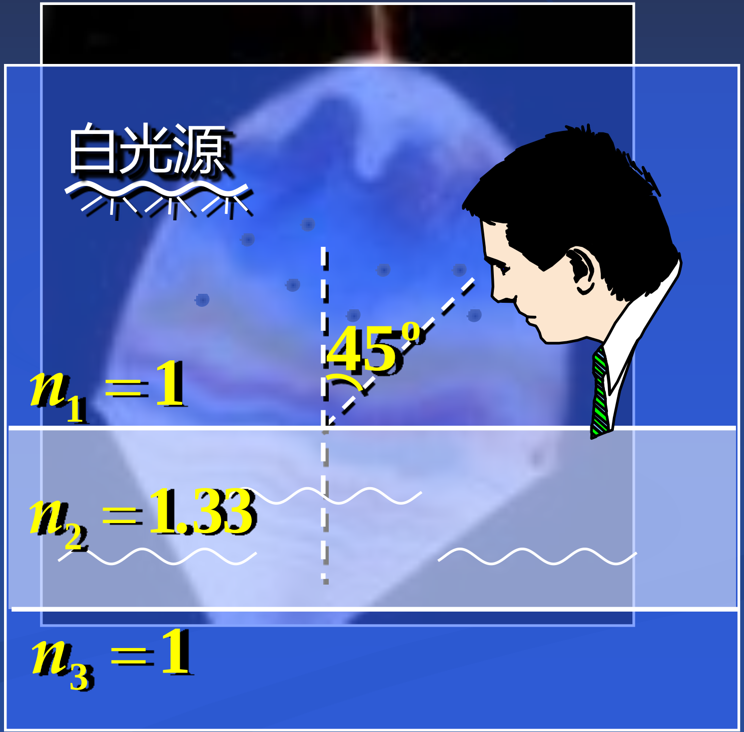
…… …… …… ……

即 沿法线呈黄色！

思考

当肥皂膜快破时，为什么会出现许多黑色小斑点？

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$



增透膜与增反膜:

增透膜: 使反射光干涉相消!

$$\delta_{反} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i}$$

$$\delta_{反} = 2n_2 e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

在两界面处均有π跃变，可消!

增反膜: 使反射光干涉相长!

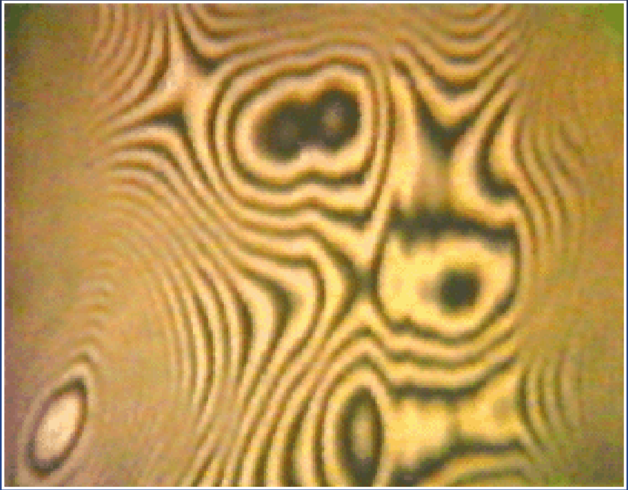
$$\delta_{反} = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\delta_{反} = 2n_2 e + \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2}$$

三、等厚干涉: $\delta = \delta(e)$

若 i, λ 一定: $\delta(e) = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \dfrac{\lambda}{2}$

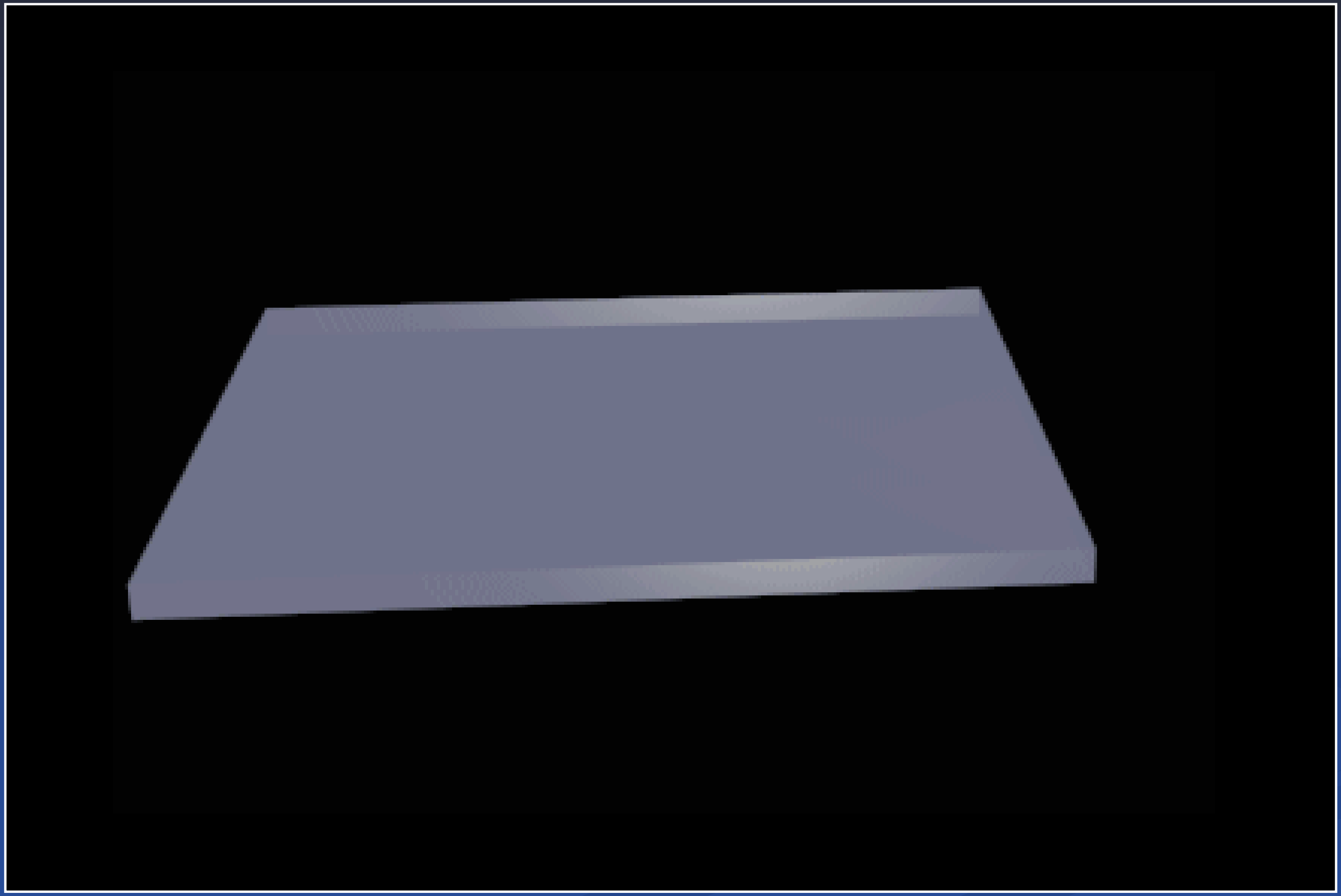
$$\delta(e) = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明 (干涉相长)} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗 (干涉相消)} \end{cases}$$



e 相同的点在同一级干涉级次上。

即干涉场中的等厚线形状即为干涉图样。

1、劈尖



1、劈尖

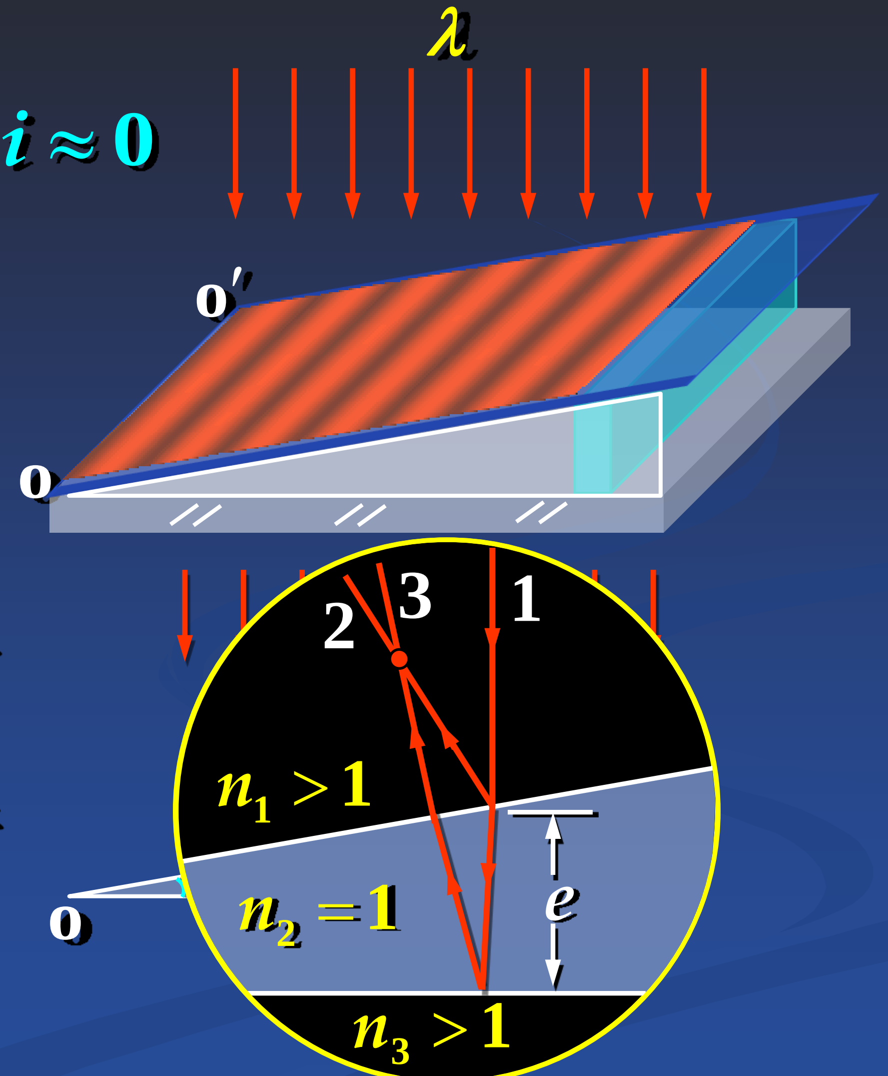
设 垂直入射，空气劈尖：$i \approx 0$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

$$= 2e + \frac{\lambda}{2}$$

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$



对底边 oo'：$e = 0$，则

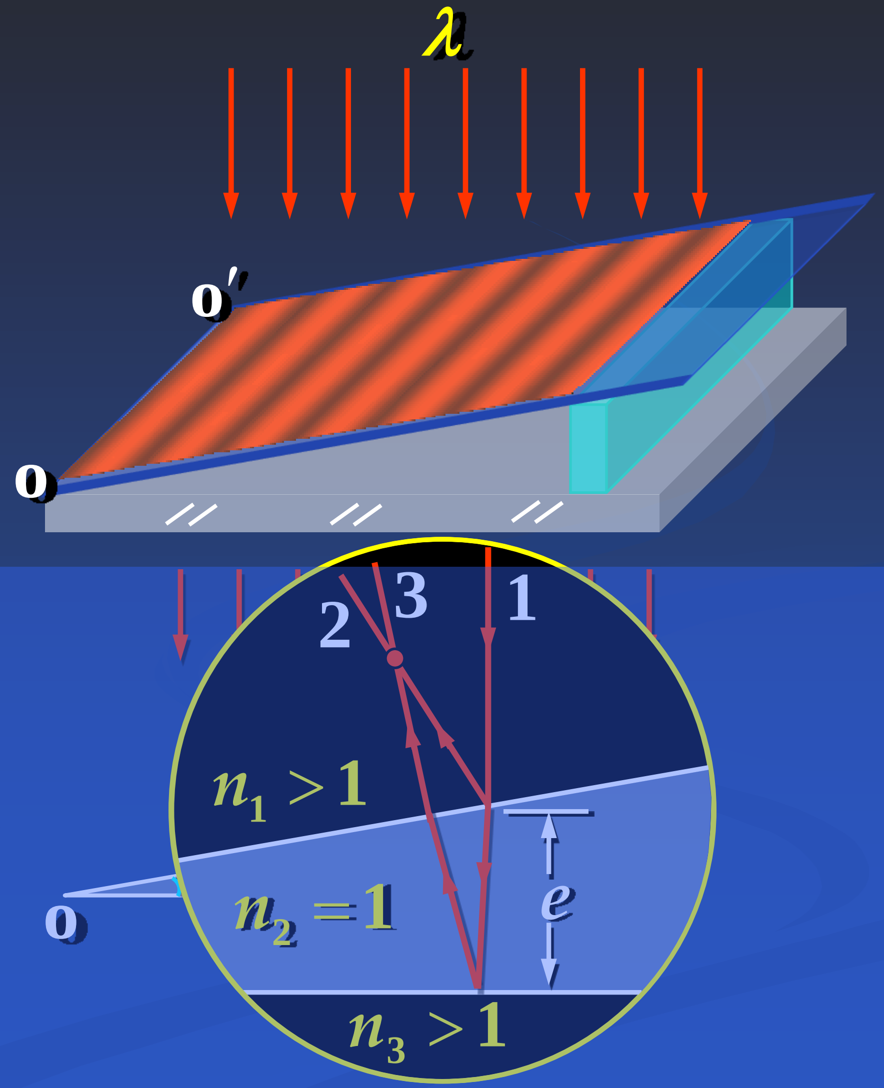
$$\delta = 2\times 0 + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

即空气劈尖底边为暗纹！

第 k 级条纹厚度：

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗} \end{cases}$$

$(k = 1, 2, 3, \cdots)$



对底边 oo'： $e=0$，则

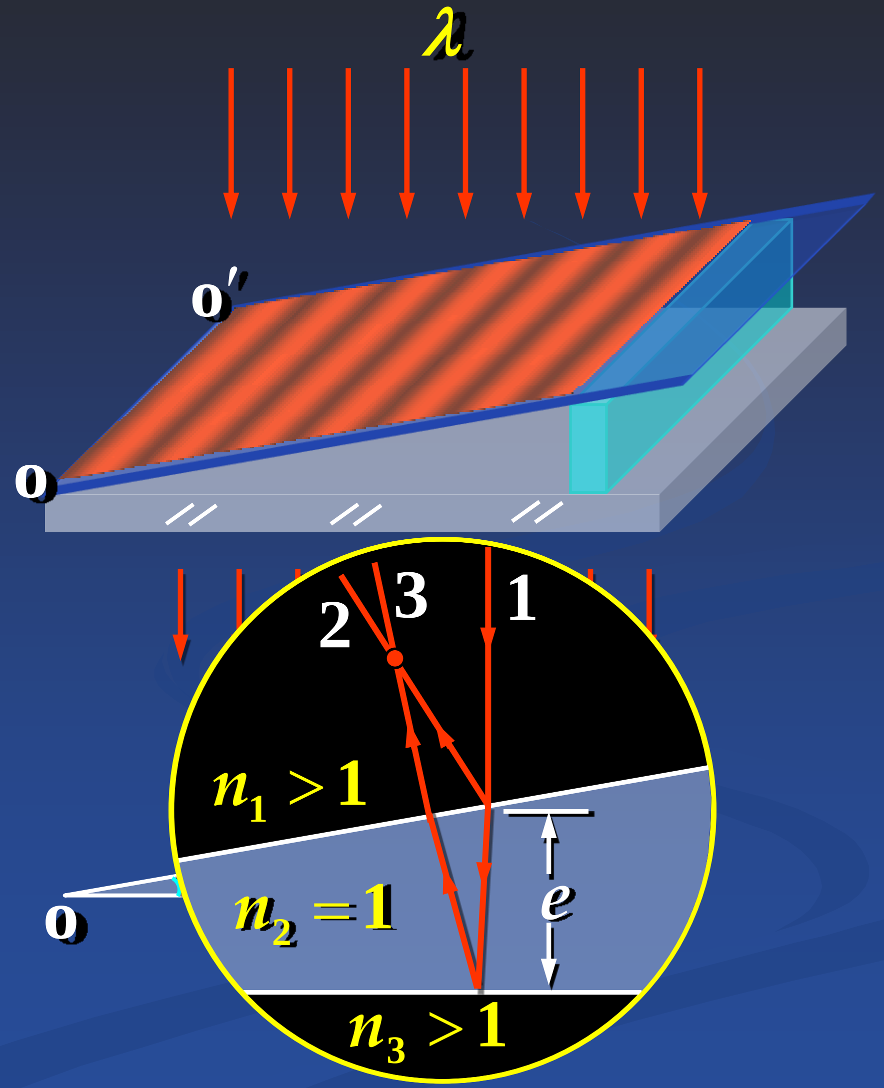
$$\delta = 2\times 0 + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

即空气劈尖底边为暗纹！

第 k 级条纹厚度：

$$e_k = \begin{cases} (k-\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (k-1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$$

$(k=1, 2, 3, \cdots)$



相邻两明纹(或暗纹) 的厚度差：

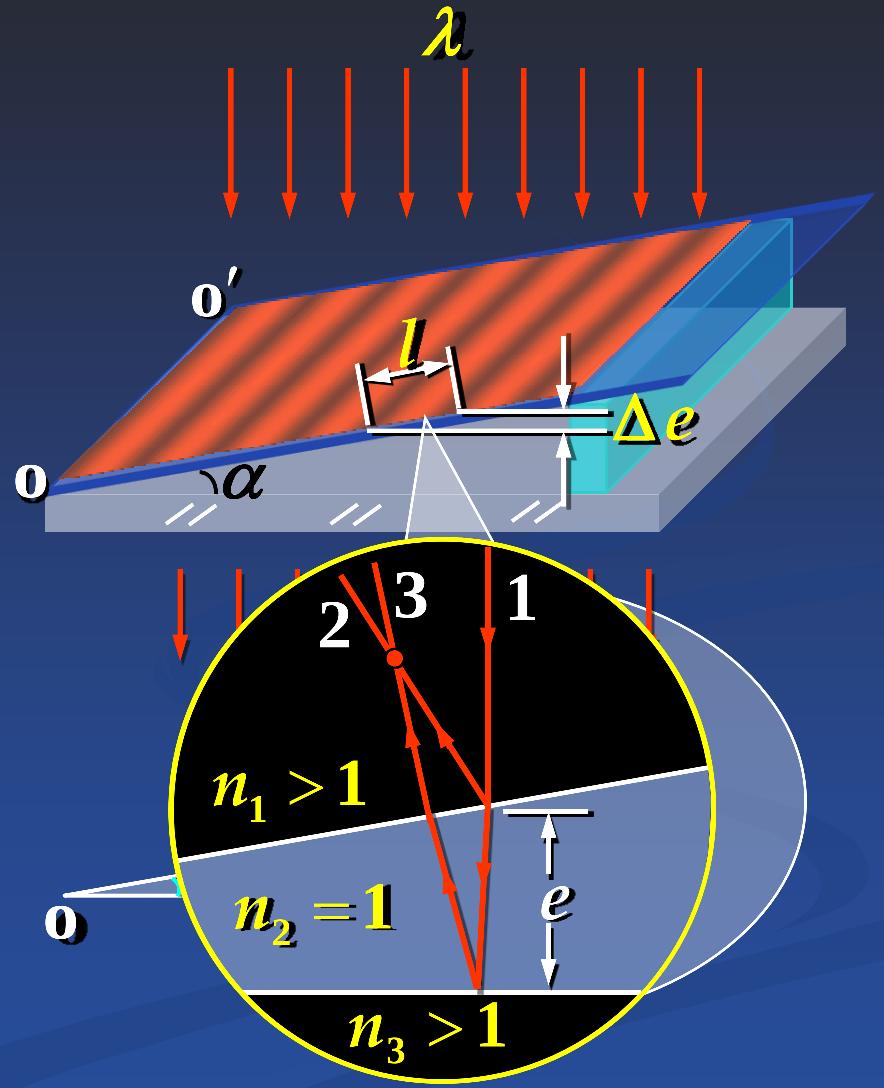
$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2}$$

对 $n \neq 1$ 的劈尖：

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$$

$$e_k = \begin{cases} (k-\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} & \text{明纹} \\ (k-1)\frac{\lambda}{2} & \text{暗纹} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$



相邻两明纹(或暗纹) 的厚度差：

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2}$$

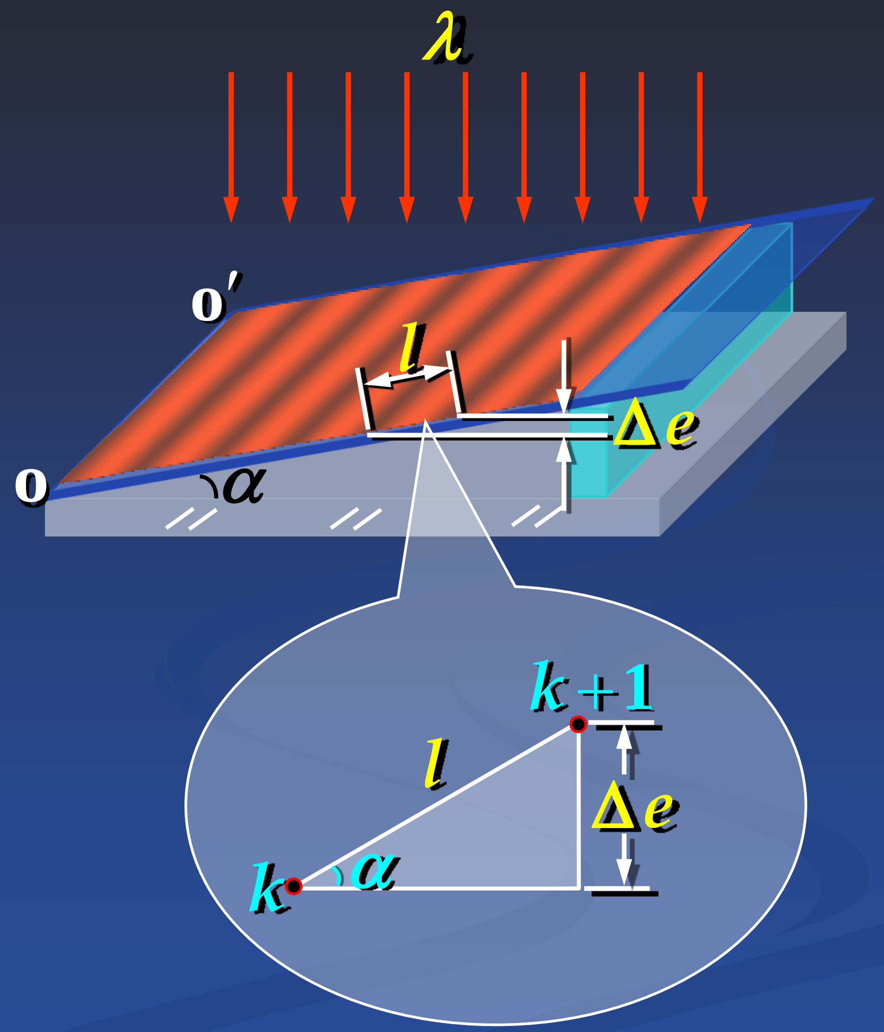
对 $n \neq 1$ 的劈尖：

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$$

$$\Delta e = l \cdot \sin\alpha \approx l \cdot \alpha$$

条纹面间距：

$$l = \frac{\lambda}{2n\alpha}$$

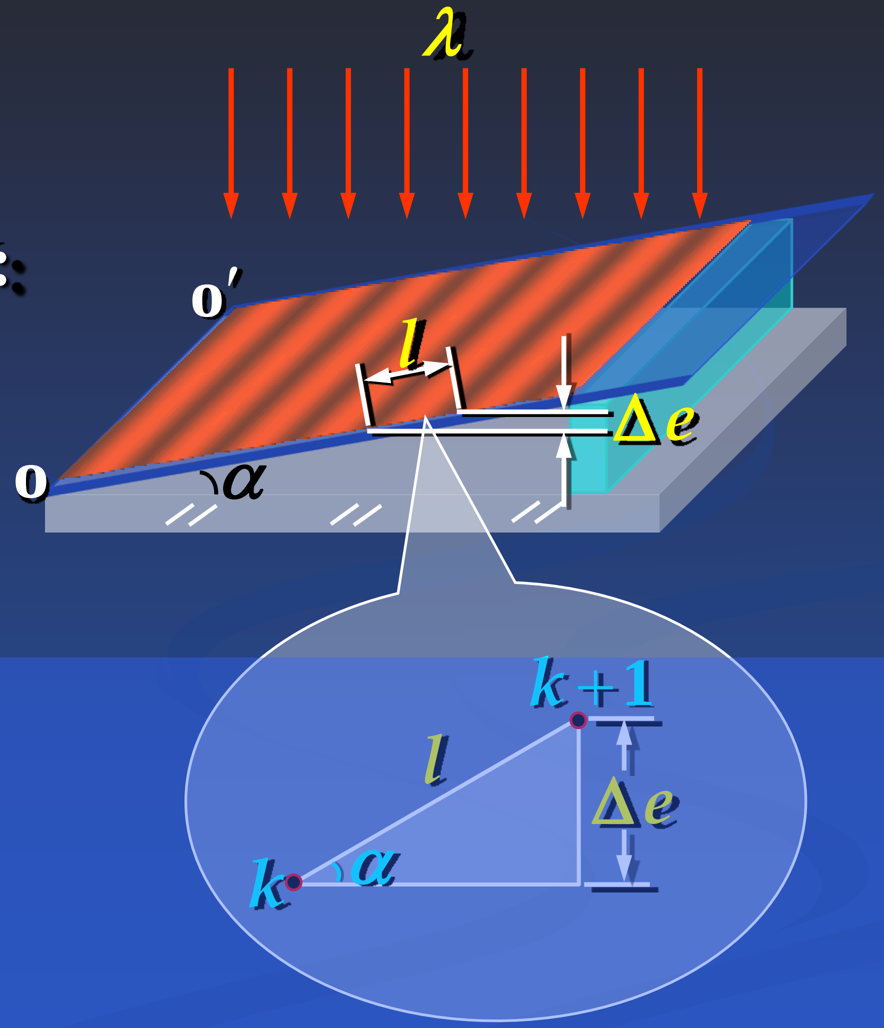


利用劈尖干涉测量小物体尺寸：

设 小物体高度为 h，干涉

明纹 (或暗纹) 总数为 N:

$$N \approx int(\frac{h}{\Delta e}) + 1$$



$$\Delta e = l \cdot \sin\alpha \approx l \cdot \alpha$$

条纹面间距： $l = \dfrac{\lambda}{2n\alpha}$

利用劈尖干涉测量小物体尺寸：

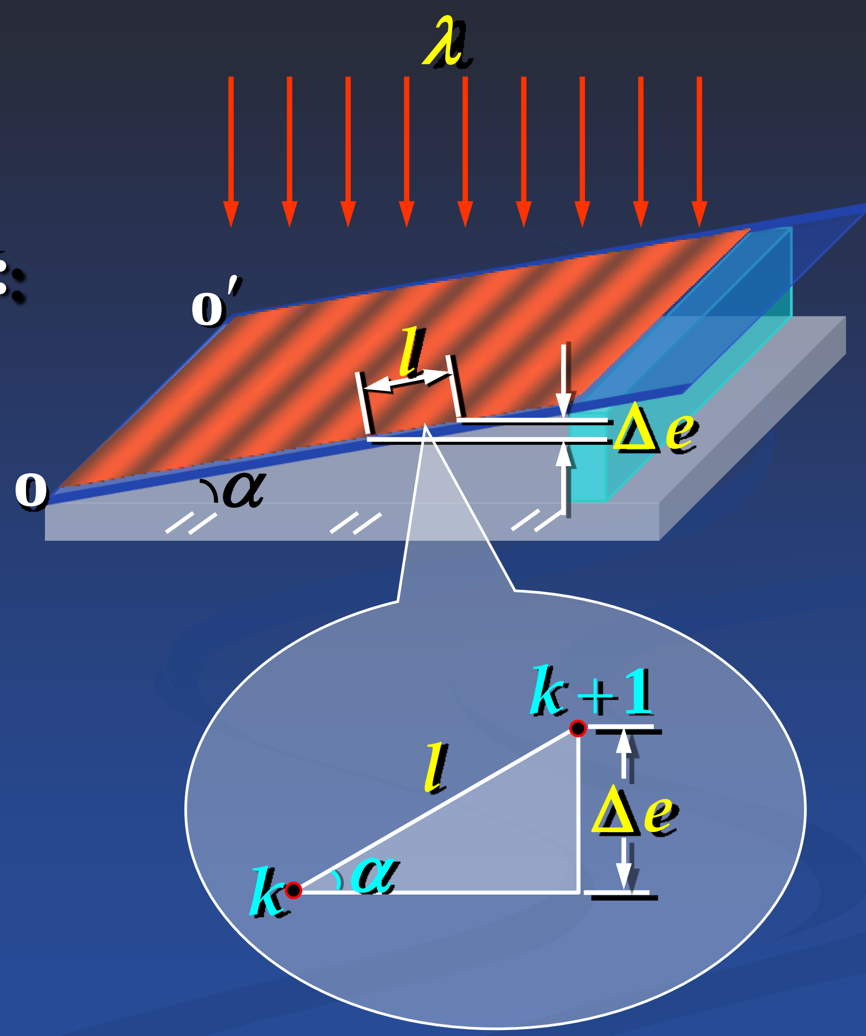
设 小物体高度为 h，干涉

明纹 (或暗纹) 总数为 N:

$$N \approx int(\frac{h}{\Delta e}) + 1$$

$$h \approx (N-1) \cdot \Delta e$$

其中: $\Delta e = \dfrac{\lambda}{2n}$



利用劈尖干涉测量工件的平整程度：

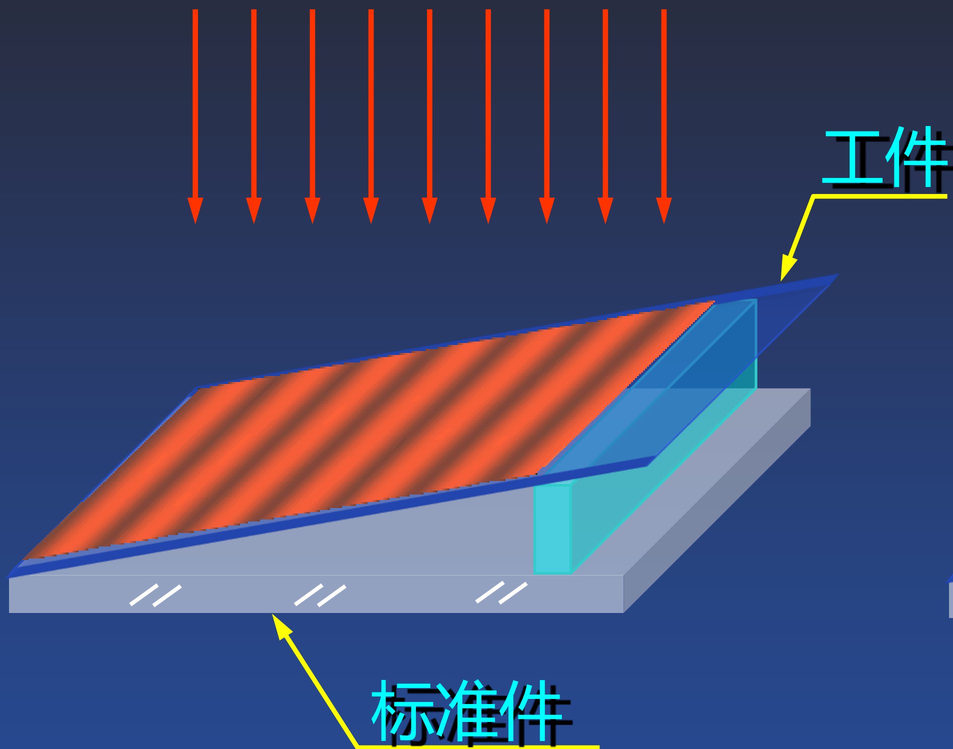


Fig. 1 平整工件

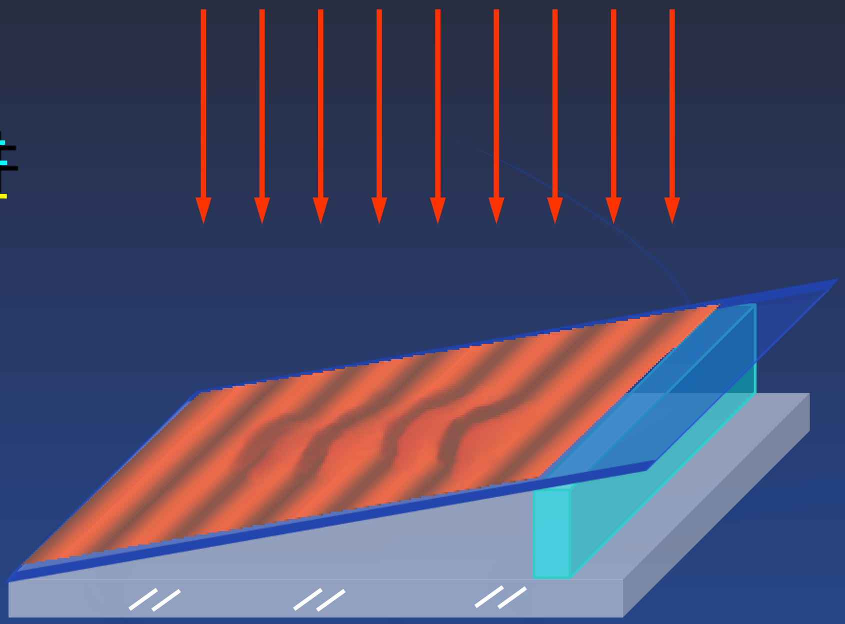


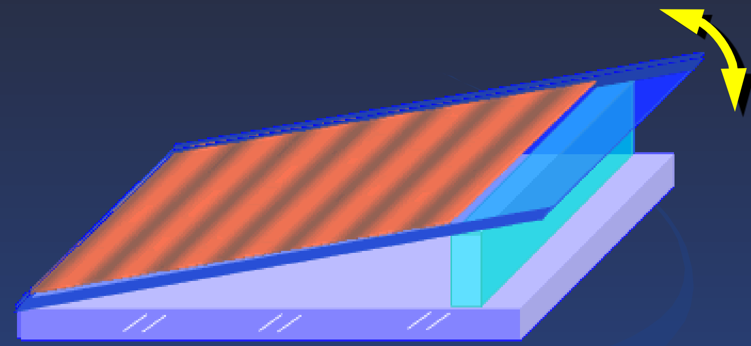
Fig. 2 不平整工件

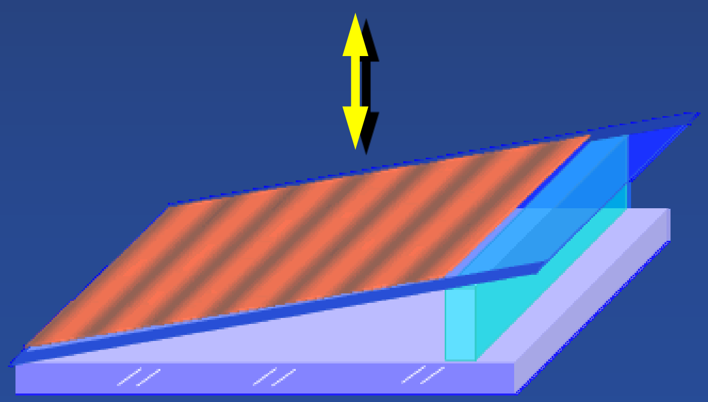
例 讨论图中劈尖干涉条纹的变动情况。

上转时: $\alpha\uparrow \longrightarrow l=\dfrac{\lambda}{2n\alpha}\downarrow$

$e\uparrow \longrightarrow k\uparrow$

变密，向底边移动！





上移时: α 不变 $\longrightarrow l$ 不变

$e\uparrow \longrightarrow k\uparrow$

疏密不变，向底边移动！

2、牛顿环

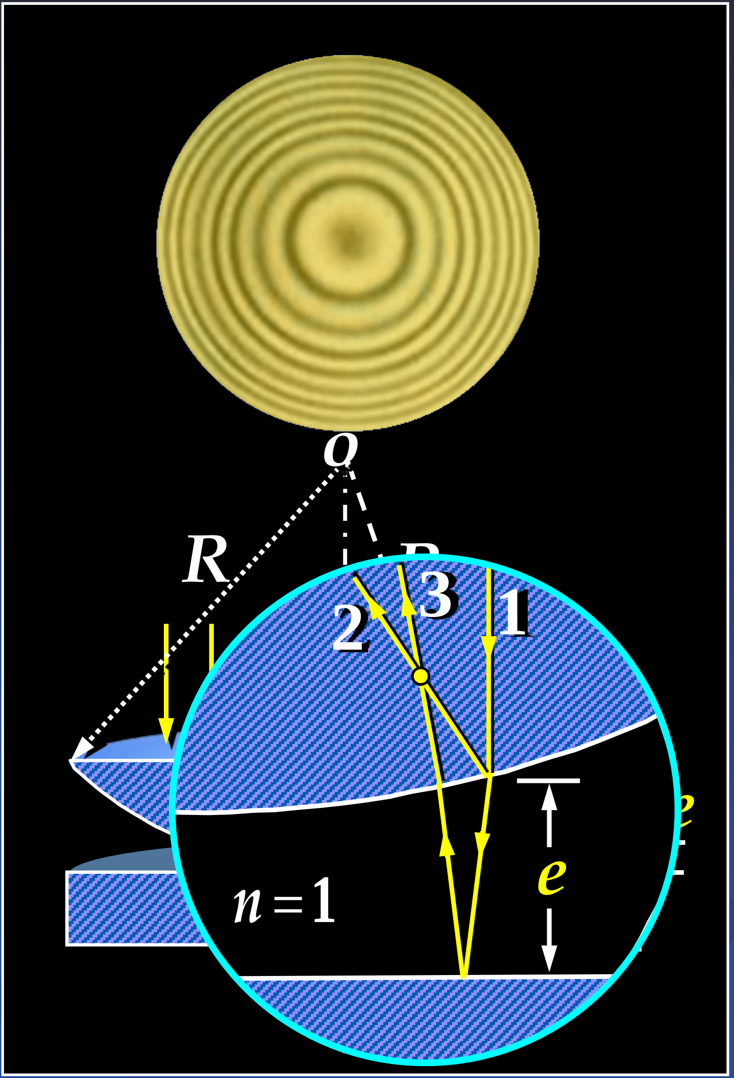
o点处**紧密接触**，即 o 点 $e = 0$

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

$$r^2 = R^2 - (R-e)^2 \approx 2Re$$

$$\delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明环} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗环} \end{cases}$$

$(k = 1, 2, 3, \cdots)$



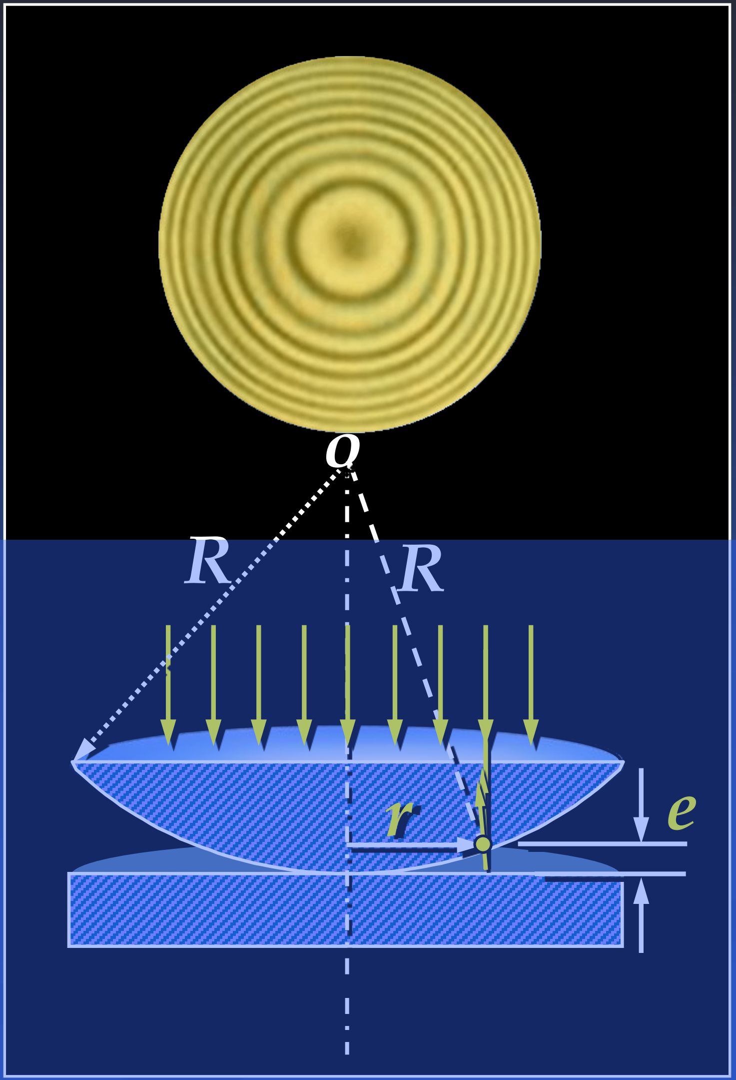
明、暗环半径:

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} & \text{明环} \\ \sqrt{(k-1)R\lambda} & \text{暗环} \end{cases}$$

相邻两暗环半径差:

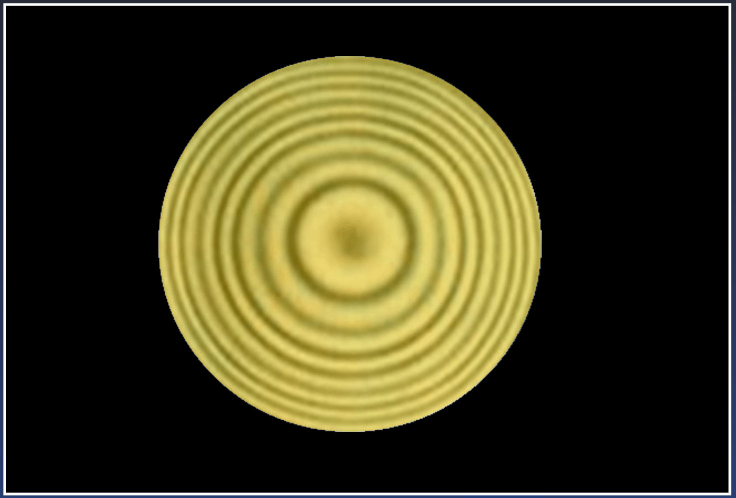
$$\delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} 2k\dfrac{\lambda}{2} & \text{明环} \\ (2k-1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{暗环} \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$



明、暗环半径：

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} & \text{明环} \\ \sqrt{(k-1)R\lambda} & \text{暗环} \end{cases}$$



相邻两暗环半径差：

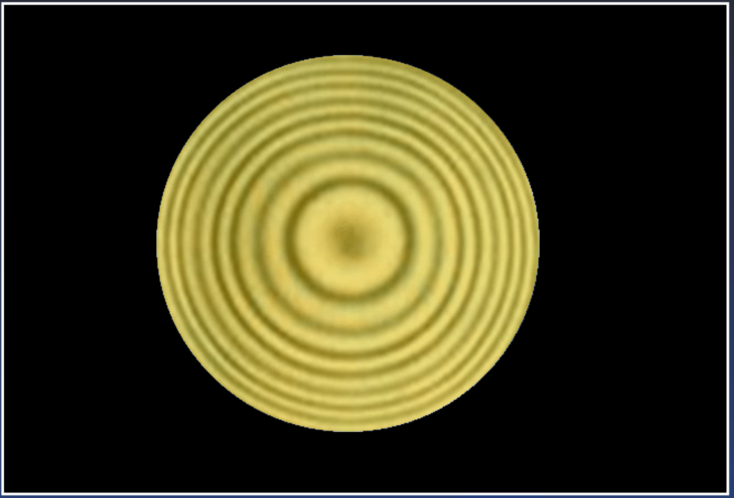
$$r_{k+1} - r_k = \sqrt{R\lambda}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

k 较大时： $\sqrt{k-1} \approx \sqrt{k}(1-\frac{1}{2k})$ ⟶ $r_{k+1} - r_k \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\lambda}{k}}$

条纹特点：愈往外，条纹愈密集，且级次 k 增加！

利用牛顿环测量透镜曲率半径:

暗环: $r_k^2 = (k-1)R\lambda$



$$R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda}$$

$$r_{k+1} - r_k = \sqrt{R\lambda}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

k 较大时: $\sqrt{k-1} \approx \sqrt{k}(1 - \frac{1}{2k}) \longrightarrow r_{k+1} - r_k \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\lambda}{k}}$

条纹特点: 愈往外，条纹愈密集，且级次 k 增加!

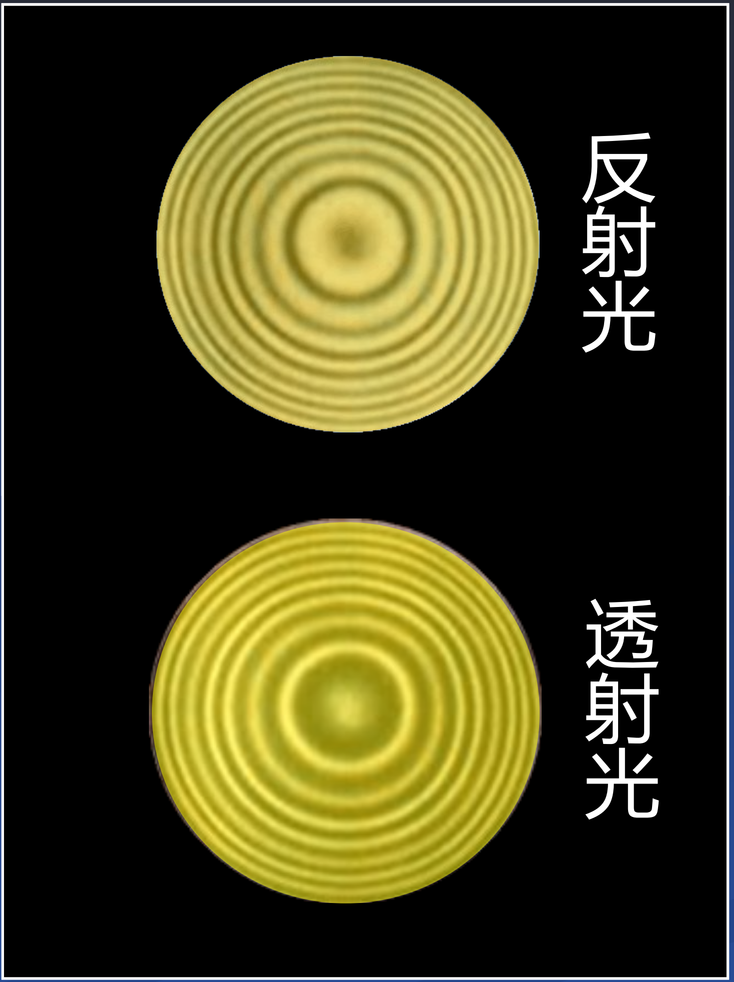
利用牛顿环测量透镜曲率半径:

暗环: $r_k^2 = (k-1)R\lambda$

$$R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda}$$

同样，对透射光: $\delta = 2e$

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{(k-1)R\lambda} & \text{明环} \\ \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} & \text{暗环} \end{cases}$$



例 如图，轻压透镜，干涉条纹将发生以下哪种变化:

(A) 条纹向右平移。

(B) 条纹向中心收缩。

(C) 条纹向外扩张。

同样，对透射光: $\delta = 2e$

$$r_k = \begin{cases} \sqrt{(k-1)R\lambda} & \text{明环} \\ \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} & \text{暗环} \end{cases}$$

例 如图，轻压透镜，干涉条纹将发生以下哪种变化：

(A) 条纹向右平移。

(B) 条纹向中心收缩。

(C) 条纹向外扩张。 ✓

(D) 条纹静止不动。

(E) 条纹向左平移。

暗纹: $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k-1)\frac{\lambda}{2}$ $e\downarrow \longrightarrow k\downarrow$

课堂练习 平凸型空气隙，单色光 $\lambda = 589\,\text{nm}$ 垂直入射，干涉暗环如图，则空气隙最大厚度不超过多少?

解 暗环条件:

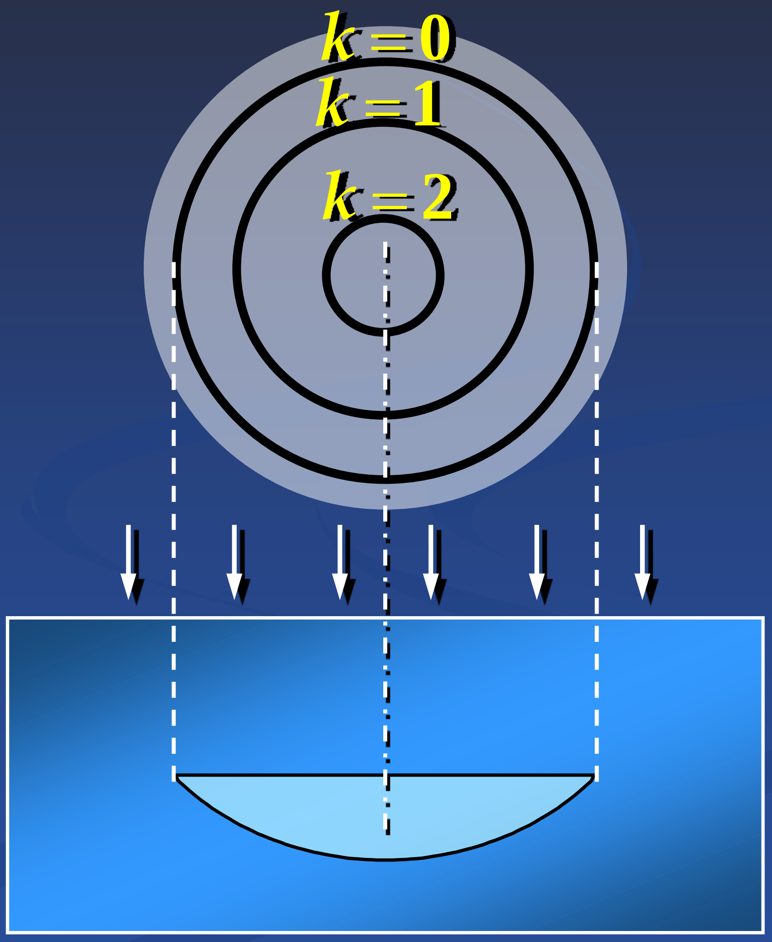
$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$k < 3 \quad (k = 0,\ 1,\ 2)$$

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} < (2\times 3+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$e < \frac{3\lambda}{2} = 883.5\,\text{nm}$$

(end)



归纳:

1. 薄膜干涉的光程差: $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + (\frac{\lambda}{2})^*$

2. 选择性干涉: *增透膜、增反膜*

3. 等厚干涉:

$$k < 3 \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} < (2\times 3 + 1)\frac{\lambda}{2}$$

$$e < \frac{3\lambda}{2} = 883.5\,\mathrm{nm}$$

归纳:

1. 薄膜干涉的光程差: $\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cdot \sin^2 i} + (\frac{\lambda}{2})^*$

2. 选择性干涉: 增透膜、增反膜

3. 等厚干涉:

(1) 劈尖: $\Delta e = \frac{\lambda}{2n}, l = \frac{\lambda}{2n\alpha}$ 平行于底边、等间距直条纹

(2) 牛顿环: $\delta = 2ne + (\frac{\lambda}{2})^* = n\frac{r^2}{R} + (\frac{\lambda}{2})^*$ (空气: $n = 1$)

同心圆环, 愈往外: 愈密集、级次愈高

(end)